Instituto Superior de Economia e Gestão

Métodos Computacionais em Economia e Finanças

Época Normal 07/01/2013

As respostas devem ser dadas de forma clara e completa na folha de resposta. Adicionalmente, todos os cálculos e gráficos efectuados no Mathematica / Matlab devem ser entregues numa *pen* no final da prova, assinalando claramente a pergunta a que dizem respeito. Devem também ser entregues todos os programas e rotinas auxiliares que forem utilizados.

I - Equações e sistemas de equações não lineares

Considere um empréstimo de L u.m. por um período de n meses, com uma taxa de juro mensal constante $r > 0$. O valor da prestação constante é dado por $k = rL/(1-(1+r)^{-n})$.

(a) Suponha que L, n e k são conhecidos e se pretende determinar a taxa de juro. Mostre que essa taxa é ponto fixo da função $g(x) = k(1-(1+x)^{-n})/L$.

(b) Considere $L = 5000$, $k = 350$ e $n = 24$. Mostre que a função g tem um único ponto fixo z no intervalo $[0.04, 0.06]$ e a sucessão definida por $r_{i+1} = g(r_i)$ converge para z qualquer que seja a aproximação inicial $r_0 \in [0.04, 0.06]$.

(c) Nas condições da alínea anterior, diga quantas iterações do método do ponto fixo devem ser efectuadas de modo a obter uma aproximação da taxa de juro com um erro absoluto inferior 10^{-6}. Sabendo que $r_{20} = 0.0464661$, determine a referida aproximação.

II - Métodos para sistemas lineares

Considere as matrizes A e A^{-1} definidas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2-2a^2} \begin{bmatrix} 2-a^2 & -a & a^2 \\ -a & 1 & -a \\ a^2 & -a & 2-a^2 \end{bmatrix}.$$

(a) Obtenha a expressão de $cond_1(A)$ e estude o condicionamento da matriz quando $a \to 1$ e $a \to \infty$.

(b) Prove que, se $|a| < 1$, o método de Jacobi converge para a solução do sistema $Ax = b$, qualquer que seja o vector $b \in \mathbb{R}^n$ e qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

(c) Admita que $|a| = 1/2$ e que $\|x - x^{(0)}\|_\infty < 1$, onde x é a solução do sistema linear em causa. Quantas iterações do método de Jacobi é necessário realizar para obter uma aproximação $x^{(k)}$ que verifique $\|x - x^{(k)}\|_\infty < 0.5 \times 10^{-3}$? Apresente a solução obtida com a precisão anterior no caso de o segundo membro do sistema linear ser $b = (1, 1, 1)$.

III - Interpolação, Aproximação e Integração

Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$f(x_i)$	0	-1	-4	9	-16	-25	-36

(a) Determine o polinómio $p(x)$ de grau ≤ 3 que interpola f nos primeiros 4 pontos da tabela e, sabendo que para $n \geq 3$ se tem $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, determine um majorante para $|f(1.5) - p(1.5)|$.

(b) Obtenha diversas aproximações para o integral $I = \int_1^7 f(x)\,dx$ utilizando a regra dos trapézios composta com: **(i)** 2 subintervalos; **(ii)** 3 subintervalos. Estime também o valor do integral usando a regra de Simpson com o maior número possível de subintervalos.

(c) Determine os valores das constantes a, b que minimizam a soma

$$\sum_{i=0}^{2} \left(f(x_i) - a\sin(\frac{\pi}{2}x_i) - b\right)^2 .$$

IV - Aplicação: Modelo de propagação de doenças

Designando por u e v, respectivamente o número de presas e de predadores em determoinado ecossistema, a evolução destas variáveis pode ser modelada pelo sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t)\left(1 - \dfrac{u(t)}{\beta}\right) \\ \\ v'(t) = \delta u(t)v(t) - \varepsilon v(t) \end{cases},$$

em que α é o balanço entre as taxas de fertilidade e morte natural das presas, β é o nível de sustentabilidade do ecossistema, ε é a taxa de morte natural dos predadores e δ é uma medida da interação entre predadores e presas.

(a) Considere $\beta = 100$, $\alpha = 0.1$ e $\varepsilon = 0.05$. Investigue para diversos valores de $\delta > 0$ o comportamento do sistema no longo prazo.

(b) Com o objectivo de manter certos níveis mínimos da população de predadores, uma espécie com estatuto especial de protecção, a tutela pondera conduzir intervenções com o objectivo de aumentar a capacidade do meio. Discuta a possibilidade de garantir um número mínimo de predadores à custa de aumentar o coeficiente β.